

RECHERCHES GÉNÉRALES
SUR
LA MORTALITÉ ET LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN.

PAR M. EULER.

1.

Les régiſtres des naiſſances & des morts à chaque âge, qu'on publie en pluſieurs endroits tous les ans, fourniſſent tant de queſtions différentes ſur la mortalité & la multiplication du genre humain, qu'il ſeroit trop long de les rapporter toutes. Or les unes dépendent pour la plûpart en ſorte des autres, qu'en ayant développé une ou deux, toutes les autres ſe trouvent pareillement déterminées. Comme les ſolutions doivent être tirées des régiſtres mentionnés, il eſt à remarquer, que ces régiſtres différent beaucoup ſelon la diverſité des villes, villages & provinces, où ils ont été dreſſés: & par la même raiſon les ſolutions de toutes ces queſtions ſe trouvent fort différentes ſelon les régiſtres ſur lesquels elles ſont fondées. C'eſt pourquoi je me propoſe de traiter ici en général la plupart de ces queſtions ſans me borner aux réſultats que les régiſtres d'un certain endroit fourniſſent: & enſuite il ſera aiſé de faire l'application à chaque endroit qu'on voudra.

2. Or j'obſerve d'abord, que toutes ces queſtions priſes en général dépendent de deux hypotheſes; lesquelles étant bien fixées il eſt aiſé d'en tirer la ſolution de toutes. Je nommerai la premiere l'hypotheſe de la mortalité par laquelle on détermine, combien d'un certain nombre d'hommes, qui ſont nés à la fois, ſeront encore en vie après chaque nombre d'années écoulées. Ici la conſidération de la multiplication n'entre point du tout en compte, & partant il faut conſti-

constituer la seconde hypothese, que je nommerai celle de la multiplication; & par laquelle je marque de combien le nombre de tous les hommes est augmenté ou diminué pendant le cours d'un an. Cette hypothese dépend donc de la quantité des mariages & de la fécondité, pendant que la premiere est fondée sur la vitalité ou le pouvoir de vivre, qui est propre aux hommes.

I. HYPOTHESE

DE LA MORTALITÉ.

3. Pour la premiere hypothese, concevons un nombre quelconque N d'enfans, qui soient nés en même tems; & je marquerai le nombre de ceux qui seront encore en vie au bout d'un an par (1) N, de ceux qui y seront encore au bout de deux ans par (2) N, de trois ans par (3) N, de quatre ans par (4) N, & ainsi de suite. Ce sont des signes généraux que j'emploie pour marquer, comment les nombre des hommes nés en même tems décroit successivement; qui auront pour chaque climat & chaque maniere de vivre des valeurs particulieres. Cependant on peut remarquer que les nombres indiqués par (1), (2), (3), (4), (5), &c. constituent une progression décroissante de fractions, dont la plus grande (1) est moindre que l'unité; & quand on continue ces termes au de là de 100, ils décroitront si fort, qu'ils évanouissent presque entierement. Car, si de 100 millions d'hommes aucun n'atteint l'age de 125 ans, il faut que le terme (125) soit moindre que $\frac{1}{100000000}$.

4. Ayant établi pour un certain lieu par un assez grand nombre d'observations les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. on peut résoudre quantité de questions qu'on propose ordinairement sur la probabilité de la vie humaine. D'abord il est évident, si le nombre des enfans nés en même tems est $=$ N, que selon la probabilité il en mourra tous les ans autant que cette table en marque:

 depuis

depuis	à	il en mourra
o ans - -	1 - - - - -	$N - (1)N$,
1 —	2 - - - - -	$(1)N - (2)N$,
2 —	3 - - - - -	$(2)N - (3)N$,
3 —	4 - - - - -	$(3)N - (4)N$,
4 —	5 - - - - -	$(4)N - (5)N$,

&c.

Et comme de ce nombre N il y aura encore probablement en vie $(n)N$ au bout de n ans, il faut que le nombre des morts avant ce terme de n ans ſoit $= N - (n)N$. Après cette remarque je donnerai la ſolution des queſtions ſuivantes.

I. QUESTION.

5. *Un certain nombre d'hommes dont tous ſoient du même âge, étant donné, trouver combien en ſeront probablement encore en vie après un certain nombre d'années.*

Suppoſons qu'il y ait M hommes, qui ayent le même âge de m ans, & qu'on demande, combien en vivront probablement encore après n ans? Qu'on poſe $M = (m)N$, pour avoir $N = \frac{M}{(m)}$, où N marque le nombre de tous les enfans nés en même tems, dont il reſte encore en vie M après m ans. Or de ce même nombre ſeront probablement encore en vie $(m + n)N$ après $m + n$ ans depuis leur naiſſance, & partant après n ans depuis le tems propoſé. Donc le nombre cherché dans la queſtion eſt $= \frac{(m + n)}{(m)} M$; ou après n ans il y aura probablement encore autant de vivans de M hommes, qui ont tous à préſent m ans.

Donc il eſt probable que du nombre d'hommes M âgés tous de m ans, il en mourra $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$, avant qu'il s'en écoulent n ans.

II. Question.

6. *Trouver la probabilité qu'un homme d'un certain age ſoit encore en vie après un certain nombre d'années.*

Que l'homme en queſtion ſoit agé de m ans, & qu'on cherche la probabilité que cet homme ſoit encore en vie au bout de n ans. Concevons M homme du même âge, & puisque, après n ans, il y en aura probablement encore vivans $\frac{(m + n)}{(m)}$ M, la probabilité que l'homme propoſé ſe trouve dans ce nombre ſera $= \frac{(m + n)}{(m)}$.

Donc la probabilité que cet homme vienne à mourir avant le bout de ces n ans, eſt $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$. Et partant l'eſpérance, que cet homme peut avoir de ne pas mourir dans l'intervalle des $(m + n)$ années prochaines, eſt à la crainte de mourir dans ce même intervalle comme $(m + n)$ à $(m) - (m + n)$. Donc l'eſpérance ſurpaſſera la crainte ſi $(m + n) > \frac{1}{2}(m)$; & la crainte ſera plus fondée ſi $(m + n) < \frac{1}{2}(m)$. Or la crainte égalera l'eſpérance, ſi $(m + n) = \frac{1}{2}(m)$.

III. Question.

7. *On demande la probabilité, qu'un homme d'un certain âge mourra dans le cours d'une année donnée.*

Que l'homme en queſtion ſoit âgé de m ans, mais qu'il meure avant qu'il parvienne à l'âge de $n + 1$ ans. Pour trouver cette probabilité, concevons un grand nombre d'hommes M du même âge,

& ayant $M = (m)N$, & $N = \frac{M}{(m)}$, il y aura $\frac{(n)}{(m)}$ M hommes, qui atteignent l'âge de n ans, & $\frac{(n+1)}{(m)}$ M, qui atteignent celui de $n+1$ ans: il en mourra donc probablement dans le cours de cette année $\frac{(n)-(n+1)}{(m)}$ M; & partant la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera $= \frac{(n)-(n+1)}{(m)}$.

De là il est évident, pour que ce même homme meure entre l'année $n+v$ de son âge, la probabilité sera $= \frac{(n)-(n+v)}{(m)}$.

Or, pour que cet homme meure un jour marqué de l'année proposée, la probabilité sera $= \frac{(n)-(n+1)}{365(m)}$.

Si la question est d'un enfant nouvellement né, on n'a qu'à écrire 1 au lieu de la fraction (m).

IV. Question.

8. *Trouver le terme, auquel un homme d'un âge donné peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'il meure avant ce terme qu'après.*

Soit l'âge de l'homme en question de m ans, & celui qu'il peut espérer d'attendre de z ans, qu'il s'agit de trouver. Or la probabilité qu'il parvienne à cet âge étant $= \frac{(z)}{(m)}$, la probabilité qu'il meure avant ce terme sera $= 1 - \frac{(z)}{(m)}$. Donc, puisque l'une & l'autre probabilité doit être la même, nous aurons cette équation $\frac{(z)}{(m)} = 1 - \frac{(z)}{(m)}$, & partant $(z) = \frac{1}{2}(m)$, dont il est aisé de

trouver

trouver le nombre z, dès qu'on a déterminé par les observations les valeurs de toutes ces fractions:

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5),\quad (6),\quad \&c.$$

car on verra d'abord laquelle (z) sera la moitié de la proposée (m).

Ayant trouvé ce nombre z, on nomme l'intervalle $z - m$ la force de la vie d'un homme de m ans.

V. QUESTION.

9. *Déterminer les rentes viageres, qu'il est juste de payer à des hommes d'un âge quelconque tous les ans, jusqu'à leur mort, pour une somme qu'ils auront avancée d'abord.*

Concevons M hommes, qui ayent tous le même âge de m ans, & que chacun paye d'abord la somme a; ce qui fournira un fond $= Ma$. Soit x la somme qu'on doit payer à chacun tous les ans, tant qu'il est en vie, & après un an le fond doit payer $\frac{(m+1)}{(m)}Mx$, après deux ans $\frac{(m+2)}{(m)}Mx$, après trois $\frac{(m+3)}{(m)}Mx$, & ainsi de suite. Or, comptant que le fond soit placé à 5 pour cent, une somme S payable après n ans ne vaut à présent que $\left[\frac{20}{21}\right]^n S$: mais, pour rendre notre détermination plus générale, supposons qu'une somme S croisse par les intérêts dans un an à λS, & $\frac{1}{\lambda}$ sera ce que nous avons marqué par $\frac{20}{21}$, & une somme S payable au bout de n ans ne vaudra à présent que $S:\lambda^n$. De là on dressera le calcul suivant:

	on doit payer	ce qui fait à présent
après 1 an - -	$\frac{(m+1)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+1)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda}$,
après 2 ans - -	$\frac{(m+2)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+2)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^2}$,
après 3 ans - -	$\frac{(m+3)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+3)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^3}$,

&c.

Or l'équité exige que toutes ces sommes réduites au tems présent soient égales au fond entier Ma, d'où l'on tire cette équation:

$$a = \frac{x}{(m)}\left[\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.\right],$$

& partant ce que le fond doit payer par an à chacun des intéressans est

$$x = \frac{(m)\,a}{\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.}.$$

Sachant donc les valeurs de toutes ces fractions (1), (2), (3), &c. il est aisé de trouver la somme x, qui convient à chaque âge de m ans rapportée à un intérêt donné.

VI. Question.

10. *Quand les intéressans sont des enfans nouvellement nés, & que le peyement des rentes viageres ne doit commencer, que lorsqu'ils auront atteint un certain age, déterminer la quantité de ces rentes.*

Supposons qu'on paye la somme a pour chaque enfant nouvellement né, & qu'il ne doive recevoir des rentes, que lorsqu'il aura atteint l'age de n ans, que depuis ce tems on lui paye tous les ans la somme

somme x, qu'il faut déterminer. Comptant donc les intérêts comme auparavant, on parviendra à cette équation:

$$a = x\left(\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.\right),$$

qui fournit

$$x = \frac{a}{\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.}$$

D'où il est évident qu'une telle rente peut devenir fort avantageuse, & qu'un homme, lorsqu'il aura atteint un certain âge, peut jouir de rentes considérables à peu de fraix pendant toute sa vie.

11. Toutes ces questions se résoudront donc facilement dès qu'on connoitra les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. qui dépendent tant du climat que de la maniere de vivre: aussi a-t-on remarqué que ces valeurs sont différentes pour les deux sexes, de sorte qu'on ne sauroit rien déterminer en général. Or, pour les conclure des observations, on comprend aisément, qu'il en faut employer un grand nombre, qui s'étend même sur toutes sortes de personnes: & à cet égard on ne sauroit se servir des régistres des rentes viageres, qui commencent par des enfans au dessous d'un an. Car d'abord, on ne peut pas regarder ces enfans comme nouvellement nés, & la plupart est sans doute déjà échappée aux dangers des premiers mois: & ensuite, on ne s'engagera gueres souvent pour des enfans d'une complexion foible, de sorte qu'on doit regarder comme choisis les enfans pour lesquels on prend des rentes viageres. Ainsi les valeurs de nos fractions (1), (2), (3), &c. qu'on conclura des régistres des rentes viageres seront infalliblement trop grandes, surtout à l'égard des premiers ans. Cependant, puisqu'il faut regler les rentes sur de tels régistres plutôt que sur la véritable mortalité, j'ajoûterai les valeurs de nos fractions telles qu'on les tire des observations de M. Keerseboom.

(1)

(1) = 0,804	(31) = 0,499	(61) = 0,264	(91) = 0,006
(2) = 0,766	(32) = 0,490	(62) = 0,254	(92) = 0,004
(3) = 0,756	(33) = 0,482	(63) = 0,245	(93) = 0,003
(4) = 0,709	(34) = 0,475	(64) = 0,235	(94) = 0,002
(5) = 0,688	(35) = 0,468	(65) = 0,225	(95) = 0,001
(6) = 0,676	(36) = 0,461	(66) = 0,215	
(7) = 0,664	(37) = 0,454	(67) = 0,205	
(8) = 0,653	(38) = 0,446	(68) = 0,195	
(9) = 0,646	(39) = 0,439	(69) = 0,185	
(10) = 0,639	(40) = 0,432	(70) = 0,175	
(11) = 0,633	(41) = 0,426	(71) = 0,165	
(12) = 0,627	(42) = 0,420	(72) = 0,155	
(13) = 0,621	(43) = 0,413	(73) = 0,145	
(14) = 0,616	(44) = 0,406	(74) = 0,135	
(15) = 0,611	(45) = 0,400	(75) = 0,125	
(16) = 0,606	(46) = 0,393	(76) = 0,114	
(17) = 0,601	(47) = 0,386	(77) = 0,104	
(18) = 0,596	(48) = 0,378	(78) = 0,093	
(19) = 0,592	(49) = 0,370	(79) = 0,082	
(20) = 0,584	(50) = 0,362	(80) = 0,072	
(21) = 0,577	(51) = 0,354	(81) = 0,063	
(22) = 0,571	(52) = 0,345	(82) = 0,054	
(23) = 0,565	(53) = 0,336	(83) = 0,046	
(24) = 0,559	(54) = 0,327	(84) = 0,039	
(25) = 0,552	(55) = 0,319	(85) = 0,032	
(26) = 0,544	(56) = 0,310	(86) = 0,026	
(27) = 0,535	(57) = 0,301	(87) = 0,020	
(28) = 0,525	(58) = 0,291	(88) = 0,015	
(29) = 0,516	(59) = 0,282	(89) = 0,011	
(30) = 0,507	(60) = 0,273	(90) = 0,008	

Or, puisque cette table est dressée sur des enfans choisis, & qui ont même déjà vécu quelques mois depuis leur naissance; si l'on veut l'appli-

l'appliquer à tous les enfans nouvellement nés dans une ville ou province, il faut diminuer tous ces nombres d'une certaine partie pour tenir compte de la grande mortalité, à laquelle les enfans ſont aſſujettis auſſitôt après leur naiſſance. Mais nous tirerons cette correction plus ſeurement des obſervations qui renferment déjà la multiplication, que je m'en vai conſidérer.

II HYPOTHESE.

DE LA MULTIPLICATION.

12. C'eſt le principe de la propagation, ſur lequel cette hypotheſe eſt fondée; d'où il eſt d'abord évident, que s'il nait tous les ans autant d'enfans, qu'il meurt d'hommes, le nombre de tous les hommes demeurera toujours le même, & qu'il n'y aura point alors de multiplication. Mais, ſi le nombre des enfans qui naiſſent tous les ans, ſurpaſſe le nombre des morts, chaque année produira une augmentation dans le nombre des vivans, qui ſera égale à l'excès des naiſſans ſur les morts. Or cette augmentation ſe changera en diminution, lorsque le nombre des morts ſurpaſſe celui des naiſſans. De là nous aurons trois cas à conſidérer: le premier où le nombre des hommes demeure conſtamment le même; le ſecond, où il augmente tous les ans; & le troiſieme, où il diminue tous les ans. Donc, ſi M marque le nombre de tous les hommes qui vivent à préſent, & mM le nombre de ceux qui vivent l'année ſuivante; le premier cas aura lieu, ſi $m = 1$, le ſecond ſi $m > 1$, & le troiſieme ſi $m < 1$; de ſorte que tous les cas peuvent être compris dans le coëfficient général m.

13. Or, ayant fixé le principe de la propagation qui dépend des mariages & de la fécondité, il eſt évident que le nombre des enfans qui naiſſent pendant le cours d'une année, doit tenir un certain rapport au nombre de tous les hommes vivans. D'où il s'enſuit, que ſi le nombre des vivans demeure toujours le même, il naitra tous les ans le même nombre d'enfans: & ſi le nombre des vivans croît ou décroît, le nombre des naiſſances doit croitre ou décroître dans la même raiſon. Donc, en comparant enſemble le nombre de tous les naiſſans

pendant plusieurs années consécutives, selon que ce nombre demeure le même, ou qu'il augmente ou diminue, on en pourra conclure si le nombre de tous les hommes demeure le même, ou s'il va en croissant ou en décroissant. En y joignant le principe de mortalité il est aussi clair, que le nombre des mourans pendant un an doit tenir un certain rapport tant à celui de tous les vivans qu'à celui des naissans.

14. Puisque ces deux principes de la mortalité & de la propagation sont indépendans l'un de l'autre, & que j'ai considéré le premier indépendamment de l'autre, on peut aussi représenter celui-ci, sans que le premier y soit mêlé. Car, supposant le nombre de tous les vivans à la fois $= M$, le nombre des enfans qui en sont produits dans l'espace d'un an pourra être posé $= \alpha M$, de sorte que α est la mesure de la propagation ou de la fécondité. Mais il est difficile de tirer de cette position les conséquences qui regardent la multiplication & les autres phénomenes qui en dépendent. Le raisonnement deviendra plus clair, si nous introduisons d'abord dans le calcul le nombre des enfans, qui naissent tous les ans, auquel si nous joignons l'hypothese de la mortalité, nous en pourrons conclure la valeur de α. Donc réciproquement le nombre des naissances dépend à la fois des deux hypotheses de la mortalité & de la fécondité; & de là on tirera ensuite sans difficulté la solution de toutes les autres questions qu'on propose ordinairement en traitant cette matiere.

15. Comme je suppose que la regle de la mortalité demeure toujours la même, je supposerai une semblable constance dans la fécondité; de sorte que le nombre des enfans qui naissent tous les ans, soit toujours proportionel au nombre de tous les vivans. Donc, si le nombre de tous les vivans demeure le même, on aura aussi tous les ans le même nombre de naissances: & si le nombre de tous les vivans va en augmentant ou en diminuant, le nombre des naissances annuelles croîtra ou décroîtra dans la même raison. Soit donc N le nombre des enfans nés pendant le cours d'une année, & nN celui des enfans nés l'année suivante: & puisque la raison qui a changé le nombre

bre

bre N eu nN subsiste encore, il faut que d'une année quelconque à la suivante le nombre des naissances croisse dans la raison de 1 à n. Par conséquent la troisieme année il naitra n^2N, la quatrieme n^3N, la cinquieme n^4N, & ainsi de suite, ou bien les nombres des naissances annuelles constitueront une progression géometrique, ou croissante ou décroissante, ou d'égalité, selon que $n > 1$, ou $n < 1$, ou $n = 1$.

16. Posons donc que, dans une ville ou province, le nombre des enfans nés dans cette année soit $=$ N, & de ceux qui naitront l'année prochaine $= n$N, & ainsi de suite selon cette progression

	le nombre des naissances
à présent - - - -	N,
après un an - - - -	nN,
après deux ans - - - -	n^2N,
après 3 ans - - - -	n^3N,
après 4 ans - - - -	n^4N,
&c.	

& si nous supposons qu'après 100 ans aucun des hommes qui existent à présent, ne soit plus en vie, il n'y aura point après 100 ans d'autres vivans, que ceux qui resteront encore en vie de ces naissances. Donc, joignant l'hypothese de la mortalité, on pourra déterminer le nombre de tous les hommes qui vivront après 100 ans. Or, puisqu'il naitra cette année n^{100}N, on aura le rapport des naissances au nombre de tous les vivans.

17. Pour rendre cela plus clair, voyons combien d'hommes seront encore en vie après cent ans des naissances de toutes les années précédentes.

	Nombre des naissances	Après 100 ans il en vivra encore
à présent	N	$(100)\ N$
après 1 an	nN	$(99)\ nN$
après 2 ans	$n^2 N$	$(98)\ n^2 N$
après 3 ans	$n^3 N$	$(97)\ n^3 N$
⋮		
après 98 ans	$n^{98} N$	$(2)\ n^{98} N$
après 99 ans	$n^{99} N$	$(1)\ n^{99} N$
après 100 ans	$n^{100} N$	$n^{100} N$

Donc le nombre de tous les vivans après 100 ans sera $=$

$$n^{100} N \left(1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.\right)$$

18. Les termes de cette série évanouiront enfin en vertu de l'hypothese de mortalité, & puisque le nombre de tous les vivans a un certain rapport au nombre des naissances pendant le cours d'une année, la multiplication d'une année à l'autre, qui vient d'être supposée comme 1 à n, nous découvre ce rapport. Car, si le nombre de tous les vivans est $= M$, & le nombre des enfans qui en sont procréés pendant le cours d'une année est posé $= N$, nous aurons

$$M = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, si nous connoissons le rapport $\frac{M}{N}$, & que nous y joignons, l'hypothese de mortalité, ou les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. cette équation détermine réciproquement la raison de la multiplication $1 = n$ d'une année à l'autre. Cependant on voit bien, que cette déter-

détermination ne fauroit être développée en général: mais, pour chaque hypothefe de mortalité, fi l'on calcule le rapport $\frac{M}{N}$ pour plufieurs valeurs de n, & qu'on en dreffe une table, il fera aifé d'affigner réciproquement pour chaque rapport donné M: N, qui exprime la fécondité, l'augmentation annuelle de tous les vivans, qui eft la même que celle des naiffances.

19. Suppofons donc que l'hypothefe de mortalité, ou les fractions (1), (2), (3), (4), (5), &c. foient connues, de même que l'hypothefe de fécondité, ou le rapport de tous les vivans M au nombre de enfans N qui en font procréés pendant un an, on en reconnoîtra fi le nombre des hommes demeure invariable, ou s'il va en augmentant ou en diminuant. Car, fi nous pofons le nombre de tous les vivans l'année prochaine $= nM$, celui des vivans à préfent étant $=$ M, il faut tirer la valeur de n de l'équation trouvée

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

& fuppofant connue la réfolution de cette équation, il eft indifférent fi l'on connoit la fécondité $\frac{M}{N}$, ou la multiplication $1 : n$, l'une étant déterminée par l'autre, moyennant l'hypothefe de la mortalité.

I QUESTION.

20. *Les hypothefes de mortalité & fécondité étant données, fi l'on connoit le nombre de tous les vivans, trouver combien il y en aura de chaque âge.*

Soit M le nombre de tous les vivans, & N le nombre des enfans qui en font procréés dans un an, & par l'hypothefe de mortalité on connoîtra la raifon de la multiplication annuelle $1 : n$. Or, connoiffant la valeur de n, il eft aifé de conclure du §. 17. qu'il y aura parmi le nombre M,

N enfans nouvellement nés,

$\frac{(1)}{n}$ N - - - - - âgés d'un an,

$\frac{(2)}{n^2}$ N - - - - - âgés de deux ans,

$\frac{(3)}{n^3}$ N - - - - - âgés de 3 ans,

$\frac{(4)}{n^4}$ N - - - - - âgés de 4 ans,

& en général

$\frac{(n)}{n^n}$ N - - - - - âgés de n ans.

Or la somme de tous ces nombres pris ensemble est $=$ M.

II QUESTION.

21. *Les mêmes choses étant données, trouver le nombre des hommes qui mourront dans un an.*

Soit M le nombre des hommes qui vivent à présent, y compris les enfans qui sont nés cette année, dont le nombre soit $=$ N; & le quotient $\frac{M}{N}$ déterminera l'augmentation annuelle, qui soit $1 : n$. Donc, l'année prochaine le nombre des vivans sera $= n$M, parmi lequel se trouve le nombre des nouvellement nés $= n$N, les autres, dont le nombre est nM $-$ nN sont ceux qui sont encore en vie de l'année précédente, dont le nombre étoit $=$ M; d'où il s'ensuit, qu'il en est mort $(1 - n)$M $+$ nN. Donc, si le nombre des vivans est $=$ M, il en meurt pendant le cours d'une année $(1 - n)$M $+$ nN; tandis que dans ce même tems il nait N enfans.

III QUESTION.

22. *Connoissant tant le nombre des naissances que des enterremens qui arrivent pendant le cours d'une année, trouver le nombre de tous les vivans, & leur augmentation annuelle, pour une hypothese de mortalité donnée.*

Soit N le nombre des naissances, & O le nombre des enterremens, qui arrivent dans une année; ensuite, posons le nombre de tous les vivans $= M$, & l'augmentation annuelle $= 1 : n$; & la solution précédente nous fournit cette équation

$$O = (1 - n)M + nN,$$

Or l'hypothese de mortalité donne:

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

Donc, ayant par la premiere $M = \frac{O - nN}{1 - n}$, cette valeur étant substituée dans l'autre équation, donne

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \&c.$$

d'où il faut trouver la valeur du nombre n.

23. Si le nombre des enterremens O est égal à celui des naissances N, de sorte que $N = (1 - n)M + nN$, il faut absolument qu'il soit $n = 1$, ou que le nombre des vivans demeure toujours le même; & dans ce cas ce nombre sera

$$M = N(1 + (1) + (2) + (3) + (4) + \&c.)$$

Or, si le nombre des naissances N surpasse celui des enterremens O, de sorte que $N - O$ soit un nombre positif, l'équation

$$\frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

don-

donnera pour n une valeur > 1, qui marque que le nombre des vivans va en croissant. Mais, si le nombre des naissances N est plus petit que celui des enterremens O, notre équation doit être représentée sous cette forme:

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

d'où l'on tire pour n une valeur plus petite que 1, qui marque que le nombre des vivans va en décroissant.

IV QUESTION.

24. *Le nombre des naissances & des enterremens d'une année étant donné, trouver combien de chaque âge il y aura parmi les morts.*

Soit N le nombre des enfans nés pendant un an, & O le nombre des morts, & par la question précédente on aura le nombre de tous les vivans M, avec la multiplication $1 : n$, d'une année à l'autre. De là considérons combien d'hommes il y aura en vie de chaque âge, tant cette année que l'année prochaine.

Nombre	Cette année	l'année suivante
des nouvellement nés - - - - - -	N	nN
de l'âge d'un an - - - - - -	$\frac{(1)}{n} N$	$(1)\ N$
de l'âge de deux ans - - - - -	$\frac{(2)}{n^2} N$	$\frac{(2)}{n} N$
de l'âge de trois ans - - - -	$\frac{(3)}{n^3} N$	$\frac{(3)}{n^2} N$
&c.		&c.

D'où

D'où il eſt évident qu'il en eſt mort pendant le cours de cette année

	le nombre des morts
au deſſous d'un an	$(1 - (1))\,N$,
de 1 an à deux ans . . .	$((1) - (2))\,\frac{N}{n}$,
de 2 ans à 3 ans	$((2) - (3))\,\frac{N}{n^2}$,
de 3 ans à 4 ans	$((3) - (4))\,\frac{N}{n^3}$,
de 4 ans à 5 ans	$((4) - (5))\,\frac{N}{n^4}$,

&c.

25. Le nombre de tous les morts de cette année étant $= O$, on aura cette équation

$$\frac{O}{N} = 1 - (1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(3)}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \&c.$$

qui convient avec celle-ci $O = (1 - n)M + nN$, à cauſe de

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, connoiſſant l'hypotheſe de la mortalité avec la multiplication annuelle $1 : n$, & le nombre des naiſſances d'une année N, on peut déterminer combien d'hommes de chaque âge mourront probablement pendant le cours d'une année.

V QUESTION.

26. *Connoiſſant le nombre de tous les vivans, de même que le nombre des naiſſances, avec les nombres des morts de chaque âge pendant le cours d'une année, trouver la loi de la mortalité.*

 Soit

Soit M le nombre de tous les vivans, N celui des naiſſances, & O des enterremens pendant le cours d'une année; & de là on connoîtra d'abord la multiplication annuelle $n = \frac{M - O}{M - N}$: ſoit enſuite pour cette année

		le nombre des morts		par la précéd. queſtion
au deſſous d'un an	- - - -	α	$=$	$(1 - (1))\,N$,
de 1 an à 2 ans	- - - -	β	$=$	$((1) - (2))\,\frac{N}{n}$,
de 2 ans à 3 ans	- - - -	γ	$=$	$((2) - (3))\,\frac{N}{n^2}$,
de 3 ans à 4 ans	- - - -	δ	$=$	$((3) - (4))\,\frac{N}{n^3}$,

&c.

& de là on trouvera les fractions (1), (2), (3), &c. qui contiennent la loi de la mortalité,

$$(1) = 1 - \frac{\alpha}{N},$$

$$(2) = (1) - \frac{n\beta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta}{N},$$

$$(3) = (2) - \frac{n^2\gamma}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma}{N},$$

$$(4) = (3) - \frac{n^3\delta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma - n^3\delta}{N},$$

&c.

27. Voilà

27. Voilà une maniere plus ſeure que celles des rentes viageres pour déterminer la loi de la mortalité: & cette détermination deviendra la plus aiſée, ſi l'on choiſit une ville ou province, où le nombre des enterremens égale celui des bâtemes, de ſorte que $n = 1$; car alors il ſuffit de ſavoir le nombre des morts de chaque âge. Mais il faut bien remarquer qu'une telle loi de mortalité ne doit être étendue que ſur la ville ou province, dont on l'a tirée. En d'autres pays pourroit avoir lieu une loi tout à fait différente; & on a obſervé en particulier, que dans les grandes villes, la mortalité eſt plus grande que dans les petites, & dans celles-ci plus grande qu'aux villages. Si l'on ſe donnoit la peine de bien établir, tant la loi de mortalité, que celle de la fécondité pour pluſieurs endroits, on en pourroit tirer quantité de concluſions fort importantes.

28. Mais il faut encore remarquer, que, dans ce calcul que je viens de déveloper, j'ai ſuppoſé, que le nombre de tous les vivans d'un endroit demeure le même, ou qu'il croît ou décroît uniformement, de ſorte qu'il en faut exclure tant des ravages extraordinaires, comme la peſte, guerre, famine, que des accroiſſemens extraordinaires comme de nouvelles colonies. Il ſera auſſi bon de choiſir un tel endroit, où tous les naiſſans demeurent dans le pays, & où des étrangers ne viennent pas pour y vivre & mourir, ce qui renverſeroit les principes ſur leſquels j'ai fondé les calculs précédens. Pour des endroits aſſujettis à de telles irrégularités, il y faudroit tenir des régiſtrés exactes tant de tous les vivans que des morts, & alors, en ſuivant les principes que je viens d'établir, on ſeroit en état d'y appliquer le même calcul. Tout revient toujours à ces deux principes, celui de la mortalité & celui de la fécondité, qui, étant une fois bien établis pour un certain endroit, il ne ſera pas difficile de réſoudre toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur cette matiere, dont je me contente d'avoir rapporté les principales.

29. Je n'ai auſſi traité ces queſtions qu'en général ſans les borner à quelque endroit particulier: or, pour en tirer tous les avantages, tout dépend d'un grand nombre d'obſervations faites en pluſieurs endroits différens, tant du nombre de tous les vivans & des naiſſans pendant un ou pluſieurs ans, que du nombre des morts avec leurs âges. Comme c'eſt un article fort difficile à bien exécuter, nous devons être très redevables à Mr. Suſſmilch, Conſeiller du Conſiſtoire ſupérieur, qui, après avoir ſurmonté des obſtacles presque invincibles, nous a fourni un ſi grand nombre de telles obſervations, qui paroiſſent ſuffiſantes pour décider la plupart des queſtions qui ſe préſentent dans cette recherche. Et en effet, il en a déjà tiré lui même tant de concluſions importantes, que nous pouvons eſpérer qu'il portera par ſes ſoins cette ſcience au plus haut degré de perfection dont elle eſt ſuſceptible.



SUR